代数幾何学シンポジウム記録
1985年度　pp.6-27

有限自己同型群をもつエンリケス曲面の分類

名大・理　金銅誠之

§0．序

双有理自己同型群が有限群となる代数曲線は種数が2以上のものに限ることが、古典的に知られている。代数曲面の場合、双有理自己同型群の有限性の問題は、K3曲面とエンリケス曲面の場合を除いて知られていた。近年、K3曲面、並びにエンリケス曲面に関するTorelli型定理が、証明されたが([4],[6],[11])、この定理は上記の問題を扱うのに有効である。K3曲面に関しては、最近、Nikulin([7],[9])が、有限自己同型群をもつK3曲面のPicard群の分類を、完了した。

ここでは、エンリケス曲面の場合について、双有理自己同型群(=自己同型群)が有限群になるものの分類と、その具体的な構成を、与える。この様なエンリケス曲面の例は、(筆者の知る限り)、Horikawa-Dolgachev([2])，Fano([3])に依る2つの例だけが、知られていたことを、注意しておく。

§1. 主結果

<u>定義</u>　2次元コンパクト連結複素多様体 Y は、2条件：
i) $H^1(Y, \mathcal{O}_Y)=0$, ii) $p_g(Y)=0$ 且つ、$K_Y^{\otimes 2}\sim 0$ (ここで、K_Y は Y の標準束とする)、を満たすとき <u>エンリケス曲面</u> と呼ばれる。

$\pi: X \to Y$ を、エンリケス曲面 Y の普遍被覆空間とする時、X は K3 曲面 (i.e. $K_X\sim 0$, $H^1(X,\mathcal{O}_X)=0$) で、π の被覆次数は 2 となる。逆に、K3 曲面と、その固定点を持たない位数 2 の自己同型 σ に対し、商多様体 $X/\{id,\sigma\}$ はエンリケス曲面となる。

<u>定義</u>　K3 曲面 X に対し、$H^2(X,\mathbb{Z})$ は、階数 22 の自由 $\mathbb{Z}$-加群であり、cup 積によって、その上に二次形式が定義され、従って lattice となる。$H^1(X,\mathcal{O}_X)=0$ より、$\mathrm{Pic}(X)$ は、$H^2(X,\mathbb{Z})$ に含まれるが、これを S_X で表わし、X の <u>algebraic lattice</u> と呼び、その階数を $\rho(X)$ (= Picard 数) で表わす。また、S_X の ($H^2(X,\mathbb{Z})$ の中での) 直交補空間を、T_X で表わし、X の <u>transcendental lattice</u> と呼ぶ。

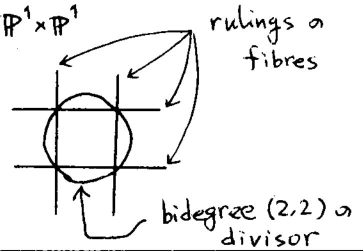
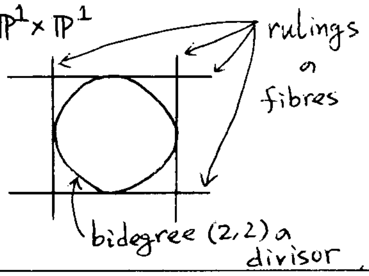
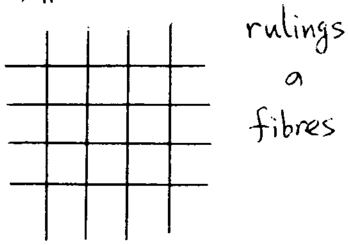
<u>構成方法</u>　有限自己同型群をもつエンリケス曲面の具体的な構成方法は次の通りである：　Y をエンリケス曲面、X をその被覆 K3 曲面とするとき、有理曲面 R と、その上の被約

因子Dが存在し、XはRのDで分枝する2重被覆の極小非特異モデルとして得られる；

$$\begin{array}{ccc} \overline{X} & \longleftarrow & X \\ {\scriptstyle 2:1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle 2:1} \\ R \supset D & & Y \end{array}$$

以上の準備の下に我々の主結果は、次の通りである。

<u>定理</u>　有限自己同型群をもつすべてのエンリケス曲面は次の表の通りに分類される；

型	Aut(Y)	(R, D)	$\rho(X)$	Y上の非特異有理曲線の個数	T_X	モジュライ
I	D_4	$R=\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$ 	19	12	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$	1次元, 既約
II	$\mathfrak{S}_4$	$R=\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$ 	19	12	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$	1次元, 既約
III	$D_4\ltimes(\mathbb{Z}_2)^4$	$R=\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$ 	20	20	$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$	一点

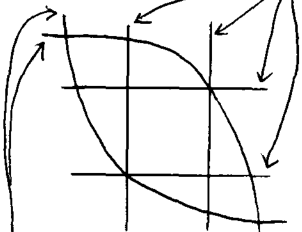
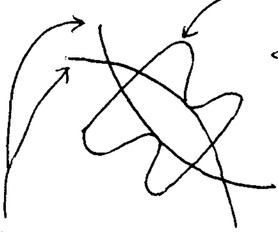
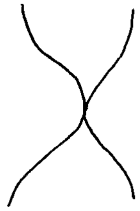
IV	$(\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_5)\times(\mathbb{Z}_2)^4$	$R=\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$ $D=4$ divisors of bidegree $(1,1)$	20	20	$\begin{pmatrix}4&0\\0&4\end{pmatrix}$	一点
V	$\mathfrak{S}_4\times\mathbb{Z}_2$	$R=\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$  rulings の fibres bidegree (1,1) の divisors	20	20	$\begin{pmatrix}4&2\\2&4\end{pmatrix}$	一点
VI	$\mathfrak{S}_5$	$R=\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$  bidegree (2,2) の divisor bidegree (1,1) の divisors	20	20	$\begin{pmatrix}4&1\\1&4\end{pmatrix}$	一点
VII	$\mathfrak{S}_5$	$R=\mathbb{P}^2$  1点で、multiplicity 9 で交わる2つの3次曲線	20	20	$\begin{pmatrix}4&2\\2&6\end{pmatrix}$	一点

表 1

但し、ここで、$\mathfrak{S}_n$, D_m, $\mathbb{Z}_k$ はそれぞれ、次数 n の対称群、位数 $2m$ の二面体群、位数 k の巡回群とし、また、分枝因子 D は、更に、いくつかの条件を満(たす)ものとする。(詳細は、[5] にゆづる)。

注意1.　Ⅰ型，Ⅶ型のエンリケス曲面が、それぞれ、Horikawa-Dolgachev [2]，Fano[3] の例に、対応する。また Nikulin[8] は、有限自己同型群を持つエンリケス曲面の"周期"は、6つのクラスに分類されると主張しているが、上記表1のⅢ型曲面は、彼のリストに載っていない（彼の証明は未発表）。

注意2.　Y上の非特異有理曲線の双対図形は、Appendix 図1～7の通りである。また、Y上の elliptic pencil の特異ファイバーは、Appendix、表2の通りに分類される。

上の定理より Dolgachev 氏が予想していた次の系を得る。

系1.　Yを勝手なエンリケス曲面、Xをその被覆K3曲面とする。この時、Xの自己同型群 Aut(X) は無限群である。

証明　Aut(Y) が有限になる場合を考えれば十分である。この場合、X上に、section を持つ elliptic pencil で、その sections のなす有限生成アーベル群の階数が、1以上のものが存在する。この事実より系は、容易に従う。

この系より、上野健爾氏による次の結果も証明される。

系2. Cを種数2のRiemann面、$J(C)$をそのJacobi多様体、$Km(J(C))$を$J(C)$に付随するKummer曲面とする。この時、$Km(J(C))$の自己同型群は無限群である。

証明　Kummer曲面 $Km(J(C))$ は常に、固定点を持たない位数2の自己同型を持つ(向井)。よって、$Km(J(C))$は、あるエンリケス曲面の被覆K3曲面であり、系1より主張は従う。

§2. 定理の証明の概略

まず、Torelli型の定理によって、エンリケス曲面の自己同型群がどの様に記述されるかを復習する。

Yをエンリケス曲面とする時、$H^2(Y,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{10} \oplus \mathbb{Z}_2$である。$M = H^2(Y,\mathbb{Z})/\mathrm{Tor}\,H^2(Y,\mathbb{Z})$とおくとき、cup積を考えることで、$M$は、階数10のlatticeとなる。Hodgeの指数定理より、Mの指数は$(1,9)$である。$O(M)$を、Mの直交群とし、次の自然な準同型を考える；

$$\rho : \mathrm{Aut}(Y) \longrightarrow O(M) .$$

定義　$\delta \in M$が非特異有理曲線で代表される時、δを nodal class と呼ぶ。nordal classes の全体をΔ_Yで表わす。$\delta \in \Delta_Y$に対し、$s_\delta \in O(M)$を次の様に定義する；

$$s_\delta : x \longmapsto x + \langle x, \delta \rangle \delta \quad , \; x \in M .$$

S_δ は、δ に直交する M の超曲面に関する reflection である。S_δ は、effective class δ を、anti-effective class $-\delta$ に移すから、$\mathrm{Im}\,\rho$ には含まれないことに注意する。$\{S_\delta \mid \delta \in \Delta_Y\}$ で生成される $O(M)$ の部分群を W_Y で表わし、reflection group と呼ぶ。上の注意より、$\mathrm{Im}\,\rho \cap W_Y = \{1\}$ であるが、W_Y は一般には $O(M)$ の中で正規とは限らない。しかしながら次が成り立つ。

定理（Torelli 型定理の系，Horikawa [4]，Namikawa [6]）
$O(M)$ の指数有限な　部分群 $G(Y)$ で次の性質を満たすものが存在する。

1°) $G(Y) \triangleright W_Y$　且つ　$G(Y) > \mathrm{Im}\,\rho$

2°) ρ より引き起こされる自然な準同型

$$\bar{\rho} : \mathrm{Aut}(Y) \longrightarrow G(Y)/W_Y$$

の、Kernel と cokernel は共に有限群である。

特に次の系が成りたつ。

系　$\mathrm{Aut}(Y)$ が有限群 $\Longleftrightarrow [O(M) : W_Y] < \infty$

これより、我々の問題は、$O(M)$ の中の指数有限の reflection group を分類する問題として、とらえることができる。

§1.で述べた定理は次の4つのStepsによって証明される。

<u>Step 1</u>： 有限自己同型群をもつ7つのタイプのエンリケス曲面の具体的な構成を与える(§4 参照)。

<u>Step 2</u>： 自己同型群が有限となるための必要条件を求める(このStepに関しては、§3で詳しく述べることにする)。

<u>Step 3</u>： Step 2で求めた必要条件を用い、自己同型群が有限であるエンリケス曲面上の非特異有理曲線の双対図形をinductiveに決定し、Step 1で構成した7つのタイプのエンリケス曲面上の非特異有理曲線の双対図形のいずれか一つと一致することを示す。このStepは、W_Yの“基本領域”を実際に求めることと同値であることを注意しておく。

<u>Step 4</u>： Y上の非特異有理曲線が決定できれば、Yの被覆K3曲面のalgebraic lattice S_X及びtranscendental lattice T_Xが計算できる。これは、S_Xが、Y上の非特異有理曲線のXへの引き戻しによって生成されていることから従う。更に2次形式論(cf.[10])より、上述の双対図形のいずれか一つと同じ双対図形をもつエンリケス曲面のモジュライ空間の既約性が従い、これより、このエンリケス曲面は、Step 1で構成した曲面に、他ならないことが解る。

以下、Step 1, Step 2について、§3-4で述べる。Step 3-4に関しては、ここでは、これ以上ふれない。(詳しくは[5]参照)。

§3. 自己同型群が有限となるための必要条件

定義　Yをエンリケス曲面とする。正則写像 $p: Y \to \mathbb{P}^1$ が elliptic pencil であるとは、p の general fibre が非特異楕円曲線である時をいう。

Y 上には、常に、elliptic pencil が存在することは知られているが、この pencil の特異ファイバーを決定することが本節の目標である。次の結果は良く知られている。

補題　$p: Y \to \mathbb{P}^1$ を elliptic pencil とする。この時、丁度 2つの p の multiple fibres F_1, F_2 が存在し、$K_Y \cong \mathcal{O}_Y(F_1 - F_2)$ が成り立つ。

この補題より、p の general fibre と、Y 上の勝手な因子との交点数は偶数であることに注意しておく。

定義　$p: Y \to \mathbb{P}^1$ を elliptic pencil とする。p が、2-section を持つ時、p を special と呼ぶ。

注意　Y 上に非特異有理曲線が存在しないならば、reflection group W_Y は自明となり、§2 で述べた Torelli の定理の系より $\mathrm{Aut}(Y)$ は無限群となる。よって $\mathrm{Aut}(Y)$ が有限ならば、必ず Y は、非特異有理曲線を持つ。この事実と、次に述べる定理より、有限自己同型群を持つエンリケス曲面上には、必ず、special elliptic pencil が存在することが従う。

定理（Cossec[1]） Yを非特異有理曲線を含むエンリケス曲面とする。この時、Y上に、special elliptic pencil が存在する。

以下、special elliptic pencil だけを考えることにする。Y上の elliptic pencil は section を持たないが、次の補題は、section を持つ、elliptic pencil との関連を与えるものである。

補題 $p: Y \to \mathbb{P}^1$ を special elliptic pencil とする。この時、次の可換な図式で以下の条件を満たすものが存在する：

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[dl, "\pi'"'] \arrow[d, "\tilde{p}"] \arrow[dr, "\pi"] & \\
J(Y) \arrow[dr, "J(p)"'] & \mathbb{P}^1 \arrow[d] & Y \arrow[dl, "p"] \\
& \mathbb{P}^1 &
\end{tikzcd}$$

(1) $\pi: X \to Y$ は被覆K3曲面，$\tilde{p}: X \to \mathbb{P}^1$ は、p の X への引き戻し。

(2) π' は、次数2の分枝被覆。

(3) $J(p): J(Y) \to \mathbb{P}^1$ は、section を持つ、elliptic pencil で、$\mathbb{P}^2$上の cubic pencil より得られる。

(4) $J(p): J(Y) \to \mathbb{P}^1$ の特異ファイバーは、multiplicity を除き、$p: Y \to \mathbb{P}^1$ のそれと一致する。

(5) $J(p): J(Y) \to \mathbb{P}^1$ の sections のなす有限生成アーベル群は、Yに自己同型として作用する。

この補題より、$p: Y \to \mathbb{P}^1$ の特異ファイバーを分類するには、

$J(p): J(Y) \to \mathbb{P}^1$ のそれを分類すれば良い。section を持つ elliptic pencil に関しては次の結果が知られている。

定理（Shioda [12]）　$J(p): J(Y) \to \mathbb{P}^1$ は上述の通りとし、$F_1, \cdots, F_k$ を、$J(p)$ の特異ファイバーの全体とする。この時、

(1)
$$e(J(Y)) = \sum_{i=1}^{k} e(F_i)$$
，但し $e(J(Y))$，$e(F_i)$ は、それぞれ、$J(Y)$，F_i のオイラー数とする。

(2) $\mathfrak{S}$ を $J(p)$ の sections 全体のなす、有限生成アーベル群とする時、
$$\rho(J(Y)) = \mathrm{rank}\,\mathfrak{S} + 2 + \sum_{i=1}^{k}(m(F_i) - 1),$$
但し、$\rho(J(Y))$ は $J(Y)$ の Picard 数、$m(F_i)$ は、F_i の既約成分の個数を表わす。

(3) $\mathrm{rank}\,\mathfrak{S} = 0$ と仮定すると、
$$|\det NS(J(Y))| = \frac{\prod_{i=1}^{k} m^{(1)}(F_i)}{|\mathfrak{S}|^2},$$

但し、$NS(J(Y))$ は、$J(Y)$ の Néron-Severi 群、$m^{(1)}(F_i)$ は、F_i の simple components の個数を表わす。

(4) $J(p): J(Y) \to \mathbb{P}^1$ の functional invariant が定数でないと仮定する。この時、
$$2k - k_1 - 4 \geqq \lambda(\mathrm{I}_0^*) + \lambda(\mathrm{II}) + \lambda(\mathrm{III}) + \lambda(\mathrm{IV}),$$
ここで k_1 は、$\mathrm{I}_n\ (n \geqq 1)$ 型の特異ファイバーの個数、$\lambda(T)$ は T 型の特異ファイバーの個数とする。

$J(Y)$ は $\mathbb{P}^2$ の9点ブローアップで得られているから、$e(J(Y))=12$, $\rho(J(Y))=10$ である。今、Y の自己同型群 $\mathrm{Aut}(Y)$ が有限とする。上述の補題より、$\mathrm{rank}\,\mathfrak{S}=0$ であることが必要となる。更に、上記の定理,(2)より次を得る。

必要条件　$|\mathrm{Aut}(Y)|<\infty$ と仮定する。この時、Y 上の、すべての special elliptic pencil p に対し、

$$(\#) \cdots\cdots \quad \sum (m(F_i)-1)=8$$

が成立する必要がある（ここで F_i は、p の singular fibres 全体を動くものとする）。

この必要条件(#)は、reflection group W_Y が $O(M)$ の中で、指数有限であるための Vinberg の判定定理の必要十分条件に、対応していることに注意しておく。Step 1で構成したエンリケス曲面の自己同型群が有限であることの証明は、この Vinberg の判定定理に負う（詳しくは [5], [13] を参照されたい）。

更に、上記、塩田氏の定理(1)～(4)より容易に次の補題を得る；

<u>補題</u>　Yを有限自己同型群をもつエンリケス曲面、$p: Y \to \mathbb{P}^1$をY上のspecial elliptic pencilとする。この時、pの特異ファイバーに含まれる非特異有理曲線の双対図形は、次の13のタイプのいずれかである：　$\tilde{E}_8$, $\tilde{E}_7 \oplus \tilde{A}_1$, $\tilde{E}_6 \oplus \tilde{A}_2$, $\tilde{D}_8$, $\tilde{D}_4 \oplus \tilde{D}_4$, $\tilde{D}_5 \oplus \tilde{A}_3$, $\tilde{D}_6 \oplus \tilde{A}_1 \oplus \tilde{A}_1$, $\tilde{A}_8$, $\tilde{A}_7 \oplus \tilde{A}_1$, $\tilde{A}_4 \oplus \tilde{A}_4$, $\tilde{A}_5 \oplus \tilde{A}_2 \oplus \tilde{A}_1$, $\tilde{A}_3 \oplus \tilde{A}_3 \oplus \tilde{A}_1 \oplus \tilde{A}_1$, $\tilde{A}_2 \oplus \tilde{A}_2 \oplus \tilde{A}_2 \oplus \tilde{A}_2$（ここで、例えば、$\tilde{E}_7 \oplus \tilde{A}_1$は$\mathrm{III}^*$型と$\mathrm{I}_2$型の特異ファイバーの双対図形を意味する）。

<u>注意</u>　上の補題で、$\tilde{A}_2 \oplus \tilde{A}_2 \oplus \tilde{A}_2 \oplus \tilde{A}_2$（すなわち、4つの$\mathrm{I}_3$型の特異ファイバー）を持つ、special elliptic pencilは、実際は現われない（Step3でこのことは証明される）。これ以外のタイプのspecial elliptic pencilはすべて、存在する。（Appendix表2を参照）。

§4. 例

§1.の定理で述べた7つのタイプの中で、最も簡単なII型のエンリケス曲面の構成方法を、以下で述べる。

$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$のbihomogeneous coordinateを$(u_0 : u_1, v_0 : v_1)$で表し、ϕを次の式で与えられる$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$の自己同型とする；

$$\phi(u_0 : u_1, v_0 : v_1) = (u_0 : -u_1, v_0 : -v_1).$$

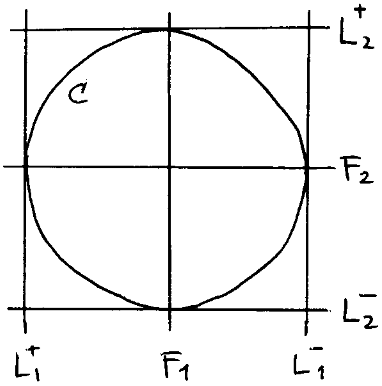
ϕ は4つの固定点 $(0:1, 0:1)$, $(0:1, 1:0)$, $(1:0, 0:1)$, $(1:0, 1:0)$ を持つことを注意しておく。

今、次の方程式で定義される曲線 C, $L_1^{\pm}$, $L_2^{\pm}$, F_1, F_2 を考える；

$$\begin{cases} C : (v_0^2 - v_1^2)u_0^2 - (v_0^2 + \alpha v_1^2)u_1^2 = 0 \quad (\alpha \in \mathbb{C},\ \alpha \neq 0, -1), \\ L_1^{\pm} : u_0/u_1 = \pm 1 \quad , \quad L_2^{\pm} : v_0/v_1 = \pm 1 \\ F_1 : u_1 = 0 \quad , \quad F_2 : v_1 = 0 . \end{cases}$$

これらの曲線は、すべて非特異で、下図の関係にある；

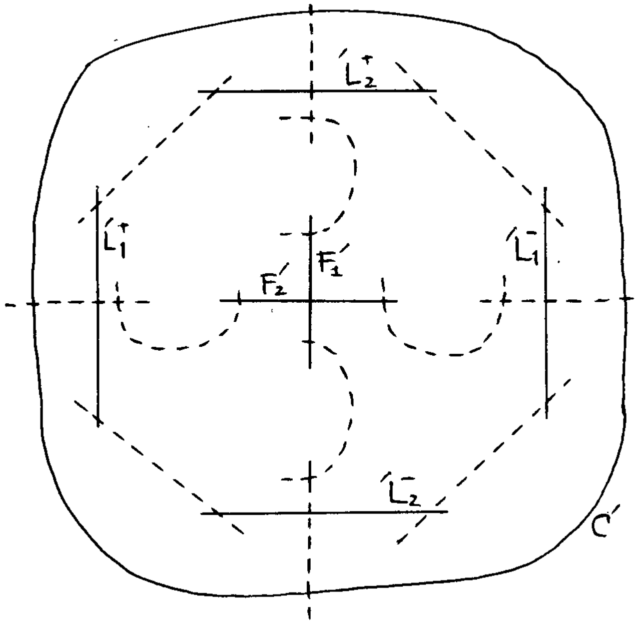
(図-1)



$D = C + L_1^+ + L_2^+ + L_1^- + L_2^-$ とおくとき、D は、ϕ-invariant で ϕ の固定点を通らない bidegree $(4,4)$ の因子である。D で分岐する $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ の2重被覆の極小非特異モデルが、II型のエンリケス曲面の被覆K3曲面であるが、我々は、これを次の様に

構成する。まず、$\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$ を 8点 $(1:\pm1, 1:\pm1)$, $(1:0, 1:\pm1)$, $(1:\pm1, 1:0)$ でブローアップし、更に、C の strict transform と、$(1:0, 1:\pm1)$, $(1:\pm1, 1:0)$ 上の第一種例外曲線との交点でブローアップする。得られた曲面を R とすると、R 上、次の図の様な曲線が存在する。

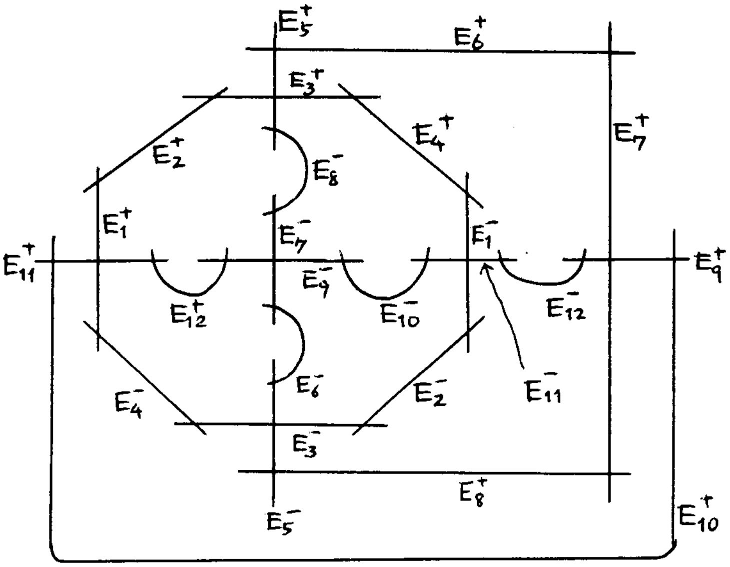
(図−2)



但し、この図で、点線は、ブローアップで得られた例外曲線、実線は、図−1 の曲線の strict transform とする。

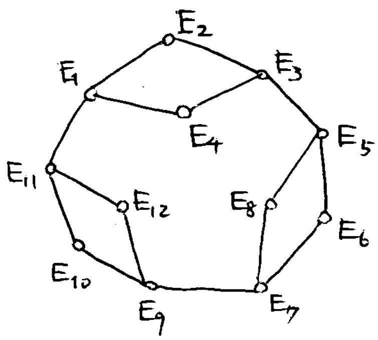
$B = C' + L_1^{+\prime} + L_1^{-\prime} + L_2^{+\prime} + L_2^{-\prime}$ とおくとき、$B \in |-2K_R|$ が、成り立つ。B で分枝した R の二重被覆を X とする時、X は、K3 曲面となり、次の図の様な非特異有理曲線を含むことがわかる。

(図-3)



Dはφの固定点を通らなかったことより、φのX上への持ち上げσで、X上、固定点を持たないものが取れる。σは、図-3の曲線に、$\sigma(F_i^+) = F_i^-$, $i=1,\cdots,12$, で作用する、位数2の自己同型である。従って商多様体 $X/\{1,\sigma\}$ をYと表わすとき、Yはエンリケス曲面で、下図の様な非特異有理曲線を含む(図-4はその双対図形)；

(図-4)



但し、E_i は、$E_i^\pm$ の像である。この双対図形の部分図形で、

elliptic pencil の特異ファイバーとして現われるものは、$\widetilde{A}_8$, $\widetilde{D}_8$, $\widetilde{D}_5 \oplus \widetilde{A}_3$ だけである。これらは、すべて、§3 の必要条件(#)を満たしている。従って、§3 でふれた、Vinberg の定理から、上の双対図形に含まれる有理曲線より引き起される reflection group W が、$O(M)$ の中で、指数有限である。明らかに W_Y は、W を含むから、W_Y も $O(M)$ で指数有限となり $\mathrm{Aut}(Y)$ が有限群であることが従う(§2. Torelli の定理の系)。

$\mathrm{Aut}(Y)$ は、上の図-4 の対称群の部分群として実現でき、実際、$\mathfrak{S}_4$ に同型であることは、簡単に示される。また、図-1 の楕円曲線 C の cross-ratio が α と共に変化することから、上で構成した、エンリケス曲面は、1次元のモジュライを持つことも解る。

Appendix

次の表2は、§1, 定理で述べた、7つのタイプのエンリケス曲面上に存在する、すべての elliptic pencils の特異ファイバーに含まれる非特異有理曲線の双対図形の分類を表わす。また、図1～図7は、上の7つのタイプのエンリケス曲面上の非特異有理曲線の双対図形である。

型	elliptic pencil の特異ファイバーに含まれる非特異有理曲線の双対図形
I	$\tilde{E}_8$, $\tilde{D}_8$, $\tilde{E}_7 \oplus \tilde{A}_1$, $\tilde{A}_7 \oplus \tilde{A}_1$
II	$\tilde{D}_8$, $\tilde{D}_5 \oplus \tilde{A}_3$, $\tilde{A}_8$
III	$\tilde{D}_8$, $\tilde{D}_4 \oplus \tilde{D}_4$, $\tilde{D}_6 \oplus \tilde{A}_1 \oplus \tilde{A}_1$, $\tilde{A}_7 \oplus \tilde{A}_1$; $\tilde{A}_3 \oplus \tilde{A}_3 \oplus \tilde{A}_1 \oplus \tilde{A}_1$
IV	$\tilde{D}_4 \oplus \tilde{D}_4$, $\tilde{D}_5 \oplus \tilde{A}_3$, $\tilde{A}_4 \oplus \tilde{A}_4$, $\tilde{A}_3 \oplus \tilde{A}_3 \oplus \tilde{A}_1 \oplus \tilde{A}_1$
V	$\tilde{E}_7 \oplus \tilde{A}_1$, $\tilde{E}_6 \oplus \tilde{A}_2$, $\tilde{D}_6 \oplus \tilde{A}_1 \oplus \tilde{A}_1$, $\tilde{A}_7 \oplus \tilde{A}_1$, $\tilde{A}_5 \oplus \tilde{A}_2 \oplus \tilde{A}_1$
VI	$\tilde{E}_6 \oplus \tilde{A}_2$, $\tilde{D}_5 \oplus \tilde{A}_3$, $\tilde{A}_4 \oplus \tilde{A}_4$, $\tilde{A}_5 \oplus \tilde{A}_2 \oplus \tilde{A}_1$
VII	$\tilde{A}_8$, $\tilde{A}_7 \oplus \tilde{A}_1$, $\tilde{A}_4 \oplus \tilde{A}_4$, $\tilde{A}_5 \oplus \tilde{A}_2 \oplus \tilde{A}_1$

表-2

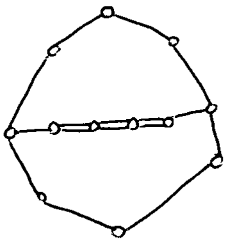


図1（I型）

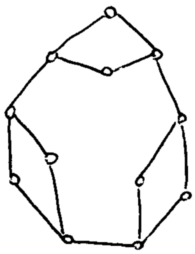


図2（II型）

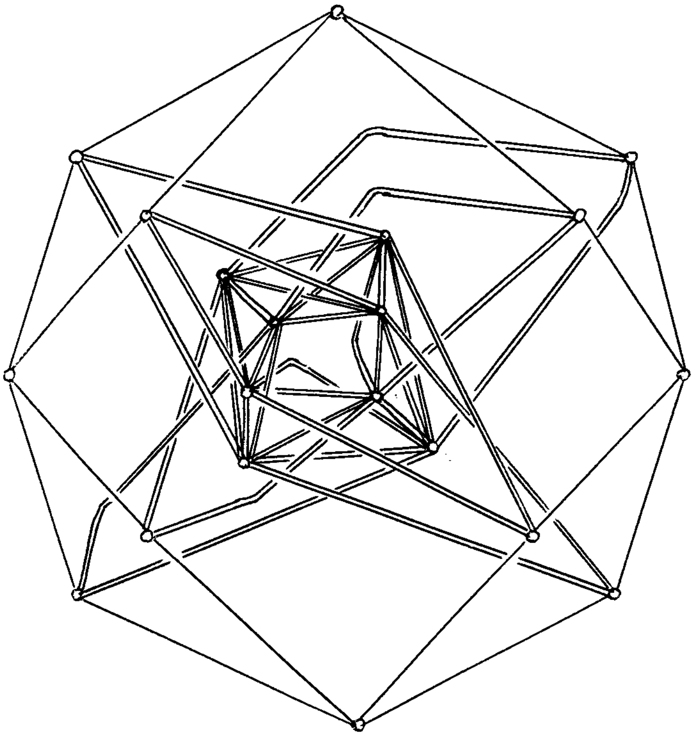


図3（III型）

図4（Ⅳ型）

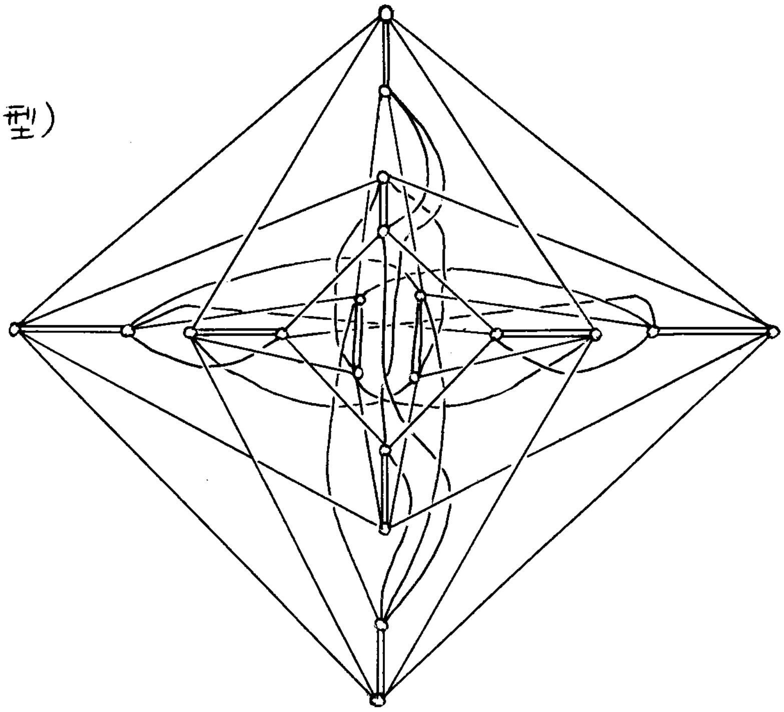


図5（Ⅴ型）

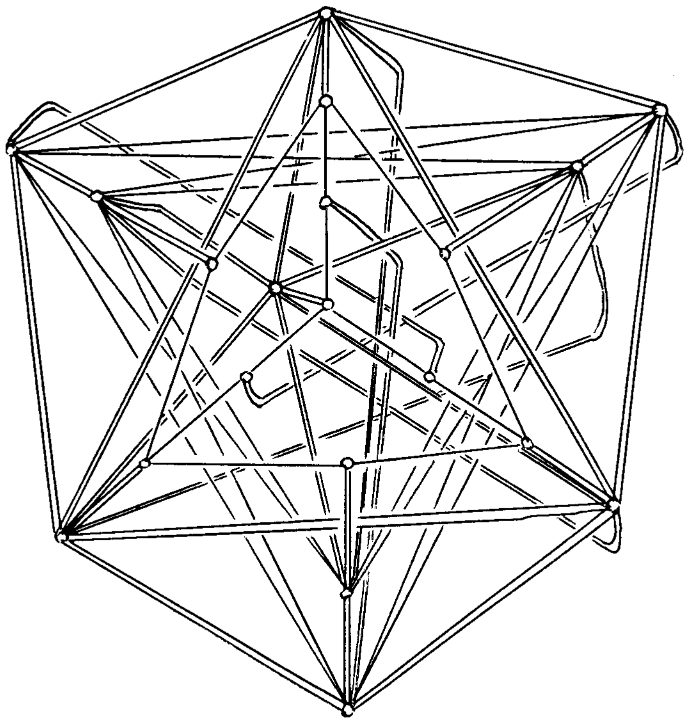


図6（VI型）

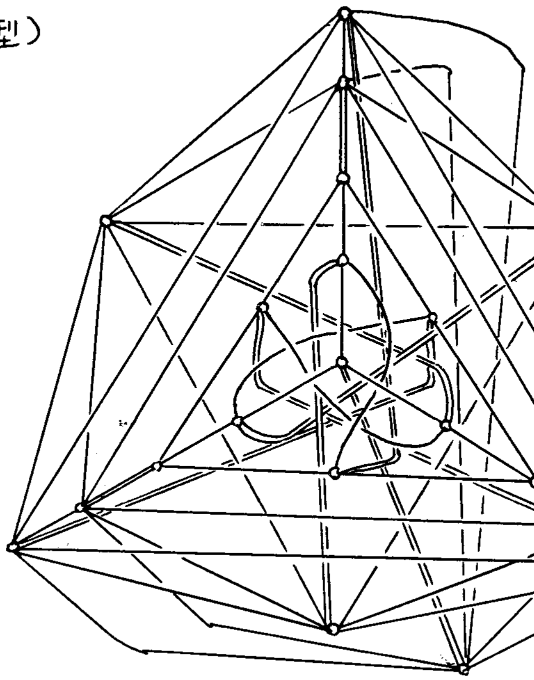
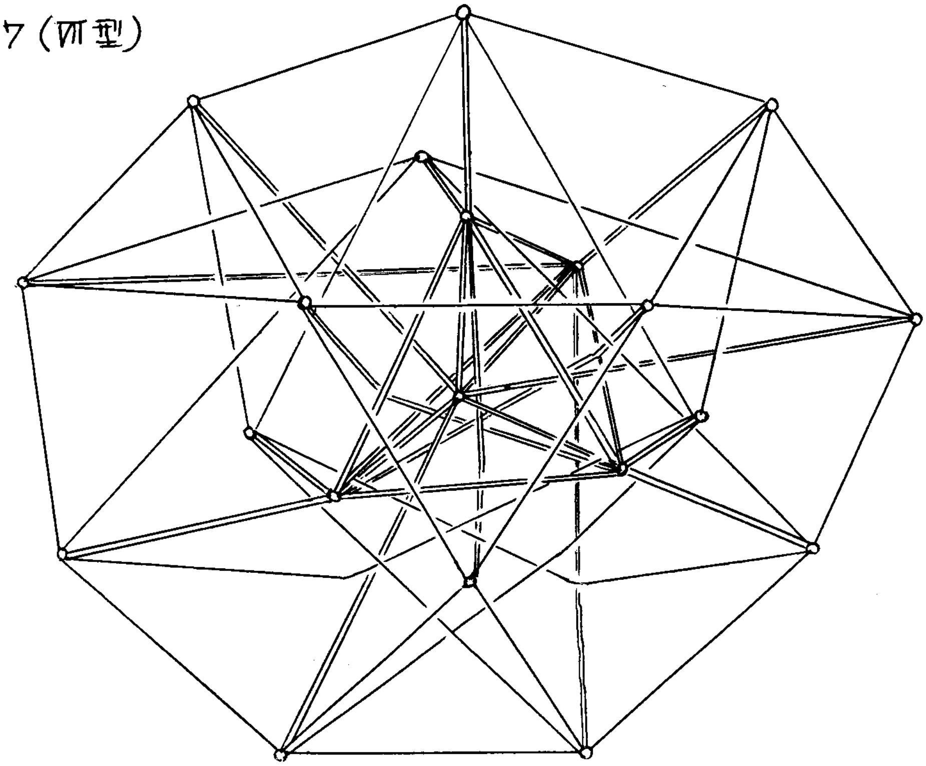


図7（VII型）



参考文献

[1] Cossec, F. : On the Picard group of Enriques surfaces. Math. Ann. 271 (1985), 577-600.

[2] Dolgachev, I. : On automorphisms of Enriques surfaces. Inven. Math. 76 (1984), 163-177.

[3] Fano, G. : Superficie algebriche di genere zero e bigenere uno ..... . Rend. Circ. Mat. Palermo 29 (1910), 98-118.

[4] Horikawa, E. : On the periods of Enriques surfaces, I, Math. Ann. 234 (1978), 73-108. II, Math. Ann. 235 (1978), 217-246.

[5] Kondō, S. : Enriques surfaces with finite automorphism groups (to appear).

[6] Namikawa, Y. : Periods of Enriques surfaces. Math. Ann. 270 (1985), 201-222.

[7] Nikulin, V. V. : On the quotient groups of automorphisms of hyperbolic forms by the subgroups generated by 2-reflections. J. Soviet Math. 22 (1983), 1401-1476.

[8] Nikulin, V. V. : On the description of the automorphism groups of Enriques surfaces. Soviet Math. Doklady, 277 (1984), 1324-1327 (ロシヤ語).

[9] Nikulin, V. V. : Surfaces of type K3 with finite automorphism group and the Picard group of rank 3. Proc. Steklov Math. Inst. 165,

(1984), 119-142 (ロシヤ語).

[10] Nikulin, V. V. : Integral symmetric bilinear forms and some of their applications. Math. USSR Izv. 14(1980), 103-166.

[11] Piatetskii-Shapiro, I., Shafarevich, I.R. : A Torelli theorem for algebraic surfaces of type K3. Math. USSR Izv. 35 (1971), 530-572.

[12] Shioda, T. : On elliptic modular surfaces. J. Math. Soc. Japan 24 (1972), 20-59.

[13] Vinberg, E. E. : Some arithmetic discrete groups in Lobachevskii spaces. in "Discrete subgroups of Lie groups and applications to Moduli", Tata-Oxford (1975), 323-348.